8 MATRIKS DAN DETERMINAN

Matriks merupakan pengembangan lebih lanjut dari sistem persamaan linear. Oleh karenanya aljabar matriks sering juga disebut dengan aljabar linear. Matriks dapat digunakan untuk merumuskan berbagai masalah termasuk masalah-masalah bisnis dan ekonomi secara singkat dan jelas, untuk kemudian memecahkannya dengan cara singkat dan mudah.

8.1.Pengertian Matriks

Matrisk merupakan suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut dengan anggota dalam matriks tersebut. Perhatikan beberapa contoh matriks berikut:

Secara umum, bentuk matriks dinyatakan dengan simbol

$$A_{ixj} = (a_{ij}) \tag{8.1}$$

dengan i adalah jumlah baris
j adalah jumlah kolom
a_{ij} adalah anggota matriks A yang terletak pada baris ke-i, kolom ke-j
i x j pada A_{ixj} disebut ukuran matriks

Contoh 1

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{1x4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_{2x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K_{1x1} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Sebuah matriks yang terdiri dari hanya satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom) sedangkan jika terdiri dari hanya satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Jadi matrisk B_{1x4} merupakan matris baris atau vektor baris, sedangakn matrisk P_{2x1} merupakan matriks kolom atau vektor kolom.

Dua matriks dikatakan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama san anggota-anggotanya yang berpadanan sama. dalam notasi matriks, jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ mempunyai ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $(a_{ij}) = (b_{ij})$, untuk semua i dan j.

Contoh 2

Perhatikan matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jika $x = 5$, maka matriks $A = B$, tetapi matrisk A tidak sama dengan matriks B untuk nilai x yang lain karena tidak semua anggota-anggotanya yang berpadanan sama. Matriks A tidak sama dengan matriks C karena ukuran kedua matrisk tersebut berbeda. ■

8.2.Operasi Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama maka jumlah $A + B$ adalah matrisk yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadanan, dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan. Dalam notasi matriks, jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ mempunyai ukuran yang sama, maka:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ dan } A - B = (a_{ij} - b_{ij}) \qquad (8.2)$$

Contoh 3

Perhatikan matrisk berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-4) & 1+3 & 0+5 & 3+1 \\ -1+2 & 0+2 & 2+0 & 4+(-1) \\ 4+3 & -2+2 & 7+(-4) & 0+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-4) & 1-3 & 0-5 & 3-1 \\ -1-2 & 0-2 & 2-0 & 4-(-1) \\ 4-3 & -2-2 & 7-(-4) & 0-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

Sedangkan $A + C$, $B + C$, $A - C$, dan $B - C$, jelas tidak terdefenisi. ■

Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c. dalam notasi matriks, jika $A = (a_{ij})$, maka:

$$cA = c(a_{ij}) = (ca_{ij}) \qquad (8.3)$$

Contoh 4

Untuk $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$,

maka $2A = 2 \text{ x } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 14 & 0 \end{pmatrix}$ ■

Jika A adalah sebuah matriks dengan ukuran m x r, dan B adalah sebuah matriks dengan ukuran r x n, maka hasil kali AB adalah sebuah matriks dengan ukuran m x n yang anggota-anggotanya diperoleh dengan cara berikut: untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari matriks AB, pilih baris i dari matrisk A dan kolom j dari matriks B, kemudian kalikan anggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasilnya.

Contoh 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Perhatikan bahwa ukuran matriks A adalah 2 x 3 dan matriks B adalah ukuran 3 x 4. Maka hasil kali AB adalah matriks berukuran 2 x 4.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4 + 2.0 + 4.2 & 1.1 + 2.(-1) + 4.7 & 1.4 + 2.3 + 4.5 & 1.3 + 2.1 + 4.2 \\ 2.4 + 6.0 + 0.2 & 2.1 + 6.(-1) + 0.7 & 2.4 + 6.3 + 0.5 & 2.3 + 6.1 + 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}$$ ■

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah benar (A, B, C suatu matriks, sedangkan a dan b suatu skalar):

1. $A + B = B + A$ (hukum komutatif terhadap penjumlahan)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum assosiatif terhadap penjumlahan)
3. $A(BC) = (AB)C$ (hukum assosiatif terhadap perkalian)
4. $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)
5. $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)
6. $A(B - C) = AB - AC$
7. $(B - C)A = BA - CA$
8. $a(B + C) = aB + aC$
9. $a(B - C) = aB - aC$
10. $(a + b)C = aC + bC$
11. $(a - b)C = aC - bC$
12. $a(bC) = (ab)C$
13. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

8.3.Matriks Khusus

Beberapa matriks khusus yang penting untuk diketahui adalah:

1. Matriks diagonal

   Matriks diagonal adalah suatu matriks persegi yang semua anggota non-diagonal utamanya bernilai nol.

   Misalnya: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Matriks identitas / matriks satuan

   Matriks identitas atau matriks satuan dilambangkan dengan I merupakan matriks persegi yang semua unsur diagonal utamanya sama dengan 1 dan unsur yang lain sama dengan 0.

   Misalnya: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Perkalian matriks identitas I dengan suatu matriks A akan menghasilkan matriks A itu sendiri; $AI = IA = A$.

3. Matriks nol

   Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya adalah nol. Matriks nol biasa dinyatakan dengan O.

   Misalnya: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Matriks simetri

   Matriks simetri adalah matriks persegi yang setiap unsurnya selalu sesuai dengan hubungan $a_{ij} = a_{ji}$ (baris i kolom j = baris j kolom i), dengan $i \neq j$.

   Misalnya: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   Perhatikan 2 – 1 – 4 adalah diagonal utama.

   $a_{12} = a_{21}$, dibaca unsur pada baris 1 kolom 2 = unsur pada baris 2 kolom 1, dst.

5. Matriks transpose

   Matriks transpose atau transpose dari suatu matriks adalah matriks baru yang diperoleh dari matriks awalnya dengan cara menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Matriks transpose dari A adalah matriks A^t.

   Misalnya: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, maka $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.4.Determinan Matriks

Istilah determinan matriks hanya terdapat pada matriks persegi. Determinan dari suatu matriks persegi A, det(A), berbentuk skalar yang diperoleh dengan cara tertentu.

- Determinan matriks berukuran 2 x 2

  Misal: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ maka

  $$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{8.4}$$

  Misalnya: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = 6 - 4 = -2$

- Determinan matriks berukuran 3 x 3

  Ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan determinan dari matriks yang berukuran 3 x 3 salah satunya adalah dengan menggunakan perluasan kofaktor.

Misalkan suatu matriks: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka $\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$. (8.5)

8.5.Invers Matriks

Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \tag{8.6}$$

dengan $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^t$.

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$, $C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} C_{21} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$,

$C_{1n} = (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} C_{21} & C_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots \end{vmatrix}$,dst.

Contoh 6

Tentukanlah A^{-1} dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

- det(A) = (3.6.0 + 2.3.2 + (-1).1.(-4)) – ((-1).6.2 + 3.3.(-4) + 2.1.0)
  = (0 + 12 + 4) – (-12 – 36 + 0)
  = 16 – (-48)
  = 64
- $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2(12) = 12$$

dengan cara yang sama diperoleh

C_{12} = 6, C_{13} = -16, C_{21} = 4, C_{22} = 2, C_{23} = 16, C_{31} = 12, C_{32} = -10, C_{33} = 16.

Sehingga:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

Jadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/64 & 4/64 & 12/64 \\ 6/64 & 2/64 & -10/64 \\ -16/64 & -16/64 & 16/64 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Soal Latihan

1. Carilah jumlah dan selisih dari kedua matriks berikut:
   a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
2. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, tentukanlah:
   a. $A + B + C$
   b. $A + B - C$
   c. $(A + B) - (A + C)$
3. Jika I adalah sebuah matriks identitas berukuran 3 x 3, dan
   Maka tentukan
   a. $A - I$
   b. $(I - A)B$
4. Perhatikan kembali soal nomor 1 bagian b. tentukanlah suatu matriks Z dengan ukuran 3 x 3, dengan ketentuan:
   a. $X - Z = 2Y$
   b. $X + Z = 3Y$
5. Jika diketahui $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, tentukanlah:
   a. $(P + Q + R)^t$
   b. $(P + Q)^t$ - R^t
6. Tentukanlah invers matriks dari matriks berikut:
   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
   b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$